

# Coupes et projections de modèles 3D de textures gaussiennes ou granulaires

Agnès DESOLNEUX<sup>1</sup>, Zhijin LI<sup>1,2</sup>, Ann-Katherine CARTON<sup>2</sup>, Serge MULLER<sup>2</sup>

<sup>1</sup>CMLA, ENS Cachan

61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan cedex, France

<sup>2</sup>GE Healthcare

283 rue de la Minière, 78530 Buc, France

agnes.desolneux@cmla.ens-cachan.fr, jonathan.li@ge.com

Ann-Katherine.Carton@ge.com, Serge.Muller@ge.com

**Résumé** – Cet article est une étude théorique des liens existants entre les modèles granulaires ou gaussiens de textures 3D et les modèles 2D associés obtenus par coupe ou par projection. Nous commençons par définir précisément ces modèles mathématiques de texture dans un cadre discret, et nous étudions ensuite les modèles obtenus par coupe et par projection. Nous montrons que ces modèles appartiennent à la même classe (granulaire ou gaussienne), et nous donnons les formules permettant de calculer leurs paramètres. Nous illustrons cet article par plusieurs exemples, issus en particulier de la modélisation des textures en mammographie. Une telle modélisation est importante pour comprendre les performances des différentes modalités d’imagerie pour des tâches cliniques telles que la détection de lésion, la caractérisation et la discrimination.

**Abstract** – This paper proposes a theoretical study investigating the relationship between 3D mathematical models of spot-noise (also called shot-noise or lumpy background) or of Gaussian textures and their associated 2D models. The latter are obtained by forward projection of the 3D models and by considering the 3D-texture model slice-by-slice. First, the 3D mathematical models are defined in a discrete framework and then the 2D associated models are characterized. We show in particular that these models belong to the same class (spot-noise or Gaussian) and we give formulas to compute their parameters. The results are illustrated with various examples, including breast texture models for breast x-ray imaging. The proposed models play a key role to advance our understanding of the performance of different imaging techniques for clinical tasks, including lesion detection, characterization or discrimination.

## 1 Introduction

Les modèles de texture ayant des propriétés statistiques réalistes sont d’une importance croissante en imagerie médicale. Ils permettent en effet de comprendre les performances des différentes modalités d’imagerie pour des tâches cliniques telles que la détection de lésion [5], la caractérisation et la discrimination. Par exemple dans le cas des mammographies (qui correspondent à une technique de projection), les images sont souvent modélisées par des textures gaussienne dont la puissance spectrale est en loi de puissance (avec un exposant  $\beta \simeq 3$ ) comme dans [1], ou encore par des modèles de *cluster lumpy background* (texture granulaire) comme dans [2].

De plus en plus de systèmes d’imagerie fournissent des images 3D. Par conséquent, le développement de modèles réalistes de textures 3D est potentiellement un outil important pour comprendre la faisabilité clinique de certaines tâches et pour trouver les paramètres optimaux d’acquisition et de traitements spécifiques des images 3D obtenues par ces nouvelles techniques d’imagerie 3D. Les modèles de textures gaussiens ou granulaires sont des modèles qui peuvent se définir aussi bien en 2D qu’en 3D, et nous proposons dans cet article d’une part la formalisation mathématique de ces différents modèles dans un

cadre discret, et d’autre part l’étude théorique du lien entre les images volumiques 3D et les images 2D associées obtenues soit par coupe (*slice*) ou par projection (*x-ray*, cf [8]).

Dans la section 2, nous considérons le cas des textures granulaires, puis dans la section 3 celui des textures gaussiennes (qui sont, après renormalisation, la limite asymptotique des textures granulaires). Nous montrons en particulier que ces deux classes de modèles sont “stables” par passage au 2D, et nous étudions quels sont les paramètres des coupes et des projections en fonction des paramètres 3D initiaux.

**Cadre et notations.** Les modèles de textures 3D considérés sont définis sur un domaine discret fini de la forme

$$\Omega_{3D} = \{1, 2, \dots, N_1\} \times \{1, 2, \dots, N_2\} \times \{1, 2, \dots, N_3\}.$$

Si  $f$  est une fonction (ou image, texture) définie sur  $\Omega_{3D}$ , on peut alors regarder soit une coupe “horizontale” de  $f$ , définie pour tout  $x \in \Omega_{2D} := \{1, 2, \dots, N_1\} \times \{1, 2, \dots, N_2\}$  par

$$\forall x \in \Omega_{2D}, f_z(x) := f(x, z),$$

soit encore la projection parallèle de  $f$  suivant la 3ème direction (“l’axe vertical”), donnée par

$$\forall x \in \Omega_{2D}, f_P(x) := \sum_{z=1}^{N_3} f(x, z).$$

## 2 Textures granulaires

Les textures granulaires sont des modèles très généraux de textures qui sont définis comme étant la superposition aléatoire de fonctions ou de formes, pouvant être elles-mêmes aléatoires. Dans la littérature, ce modèle de texture se retrouve sous des noms variés : *spot-noise* [9], *shot-noise* [7], ou encore (*cluster lumpy background* [2]).

Dans le cadre mathématique discret et périodique, un tel modèle s'écrit comme un champ aléatoire  $U$  défini sur un domaine discret  $\Omega$  (qui peut être 1D, 2D ou 3D) par

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad U(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j; m_j), \quad (1)$$

où  $M$  est un nombre aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda|\Omega|$  (où  $|\Omega|$  est le cardinal de l'ensemble discret  $\Omega$ ), où les points  $\mathbf{x}_j$  sont indépendants suivant la loi uniforme sur  $\Omega$  et où  $g(\cdot; m)$  est une famille de fonctions "noyau" dépendant d'un paramètre aléatoire  $m \in \mathbb{R}^d$ , appelé aussi "marque". Les marques  $m_j$  sont indépendantes entre elles, indépendantes aussi des points  $\mathbf{x}_j$ , et suivent une loi sur  $\mathbb{R}^d$  notée  $P(dm)$ . Un modèle de texture granulaire est entièrement déterminé par la donnée de : l'intensité  $\lambda$  du processus ponctuel sous-jacent, la fonction noyau  $g(\cdot; \cdot)$  et la loi  $P(dm)$  sur les marques.

Par exemple, la fonction  $g$  peut être l'indicatrice d'une sphère de rayon aléatoire  $m$ , ou bien une fonction exponentielle d'un ellipsoïde aléatoire et la marque contient alors les orientations et longueurs des axes de l'ellipsoïde, etc. Notons aussi que le modèle de *cluster lumpy background* de [2] rentre dans le cadre de ce modèle mathématique de texture granulaire.

Comme nous l'avons déjà indiqué, nous nous intéressons à la question de savoir comment se comportent les textures granulaires vis-à-vis des coupes et projections. Le principal résultat est que le modèle est stable, au sens où la coupe ou la projection d'une texture granulaire est encore une texture granulaire, avec de nouveaux paramètres qui se déduisent de ceux de la texture 3D d'origine. Plus précisément, des calculs directs permettent d'obtenir la proposition suivante.

**Proposition 2.1** *Soit  $U$  une texture granulaire définie sur  $\Omega_{3D}$ , d'intensité  $\lambda$ , de fonction noyau  $g(\cdot; \cdot)$  définie sur  $\Omega_{3D} \times \mathbb{R}^d$  et de loi  $P(dm)$  sur les marques. Alors*

- Pour tout  $z \in \{1, \dots, N_3\}$ , la coupe  $U_z$  de  $U$  est une texture granulaire d'intensité  $\tilde{\lambda} = \lambda N_3$ , de fonction noyau  $\tilde{g}$  définie sur  $\Omega_{2D} \times \mathbb{R}^{d+1}$  par

$$\tilde{g}(x; \tilde{m}) = \tilde{g}(x; (l, m)) := g((x, l); m)$$

et de loi  $\frac{1}{N_3} P(dm)$  sur les marques  $\tilde{m} = (l, m)$ .

- La projection  $U_P$  de  $U$  est une texture granulaire d'intensité  $\tilde{\lambda} = \lambda N_3$ , de fonction noyau  $\tilde{g}$  définie sur  $\Omega_{2D} \times \mathbb{R}^d$  par

$$\tilde{g}(x, m) = \sum_{z=1}^{N_3} g((x, z); m) = g_P(x; m)$$

et de loi  $P(dm)$  sur les marques  $m$ .

**Exemple 1** : Si la fonction noyau  $g(\cdot; m)$  est la fonction indicatrice d'une sphère de rayon  $m$ , c'est à dire  $g(\mathbf{x}; m) = \mathbb{I}_{|\mathbf{x}| \leq m}$  (où  $|\mathbf{x}|$  est la norme  $L^2$  du vecteur  $\mathbf{x}$ ), et si la loi sur  $m$  est juste un Dirac en une certaine valeur  $R \in \mathbb{R}_+$ , alors les coupes sont des textures granulaires d'intensité  $\tilde{\lambda} = \lambda N_3$  et de fonction noyau  $\tilde{g}(x; \tilde{m}) = \mathbb{I}_{|x| \leq \tilde{m}}$ , indicatrice d'un disque de rayon  $\tilde{m}$ , de loi uniforme sur  $\{\sqrt{R^2 - \min(R^2, k^2)}, k = -R, -R + 1, \dots, 0, \dots, N_3 - R - 1\}$ . Ceci est équivalent à avoir une intensité  $\tilde{\lambda} = \lambda(2R + 1)$  et des marques  $\tilde{m}$ , de loi uniforme sur  $\{\sqrt{R^2 - \min(R^2, k^2)}, k = -R, -R + 1, \dots, R\}$ .

La projection quant à elle est une texture granulaire d'intensité  $\tilde{\lambda} = \lambda N_3$ , et de fonction noyau  $g_P(x; m) = \sum_{-m}^m \mathbb{I}_{z^2 \leq m^2 - |x|^2} = 2\lfloor \sqrt{m^2 - |x|^2} \rfloor + 1$ , et de loi sur  $m$  donnée par Dirac en  $R$ . Cet exemple est illustré sur la figure 1.

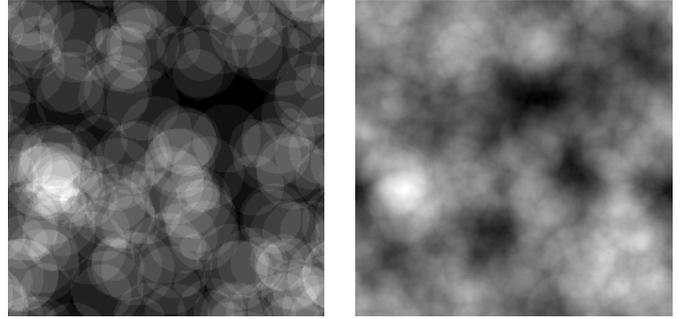


FIGURE 1 – Coupe (à gauche) et projection (à droite) de la texture granulaire de l'exemple 1, obtenue à partir de la fonction indicatrice 3D d'une sphère de rayon  $R$ .

**Exemple 2** : Dans cet exemple, on considère le cas d'une fonction noyau ellipsoïdale allongée d'orientation 3D aléatoire. Plus précisément, on part de la fonction ellipsoïdale donnée pour  $\mathbf{x} \in \Omega_{3D}$  par

$$E(\mathbf{x}) = \exp(-(0.005\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 + \mathbf{x}_3^2)/10).$$

Et on considère la fonction noyau  $g(\mathbf{x}; m) = E(m\mathbf{x})$ , où ici  $m$  est une rotation aléatoire de  $\mathbb{R}^3$ . Les coupes et la projection de cette texture sont des textures granulaires faisant intervenir des fonctions ellipsoïdales d'orientation et de longueurs d'axe aléatoires, dont les formules exactes s'écrivent à partir de la Proposition 2.1. Cet exemple est illustré sur la figure 2.

Lorsque l'intensité  $\lambda$  du processus ponctuel sous-jacent tend vers l'infini, la texture granulaire tend (après renormalisation) vers une texture gaussienne. De façon plus formelle, on a la proposition suivante, qui est une simple variante du théorème de la limite centrale. La preuve de ce résultat se trouve par exemple dans [3], où les auteurs étudient le lien avec les textures gaussiennes et les textures à phases aléatoires.

**Proposition 2.2** *Soit  $U$  une texture granulaire donnée par (1). Sa moyenne est  $\mathbb{E}(U(\mathbf{x})) = \lambda \bar{g}$  avec  $\bar{g} = \int \sum_{\mathbf{y} \in \Omega} g(\mathbf{y}; m) P(dm)$ . Lorsque  $\lambda$  tend vers l'infini, le champ aléatoire  $(U - \lambda \bar{g})/\sqrt{\lambda}$*

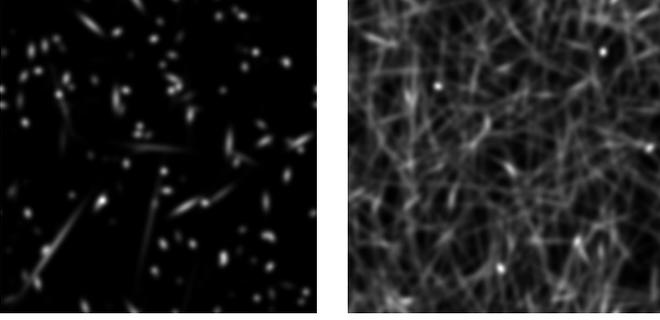


FIGURE 2 – Coupe (à gauche) et projection (à droite) de la texture granulaire de l'exemple 2, obtenue à partir d'une fonction ellipsoïdale allongée d'orientation 3D aléatoire. Ici on a un volume de taille  $257 \times 257 \times 257$  et  $M = 400$ .

tend vers un champ gaussien périodique stationnaire de moyenne nulle et de covariance

$$\text{Cov}(Z(\mathbf{y}), Z(\mathbf{y} + \mathbf{x})) = \int \sum_{\mathbf{z} \in \Omega} g(\mathbf{z}; m)g(\mathbf{z} - \mathbf{x}; m)P(dm).$$

### 3 Textures gaussiennes

Les textures gaussiennes stationnaires définies sur un domaine discret périodique se caractérisent très bien car elles s'écrivent toutes comme la convolution d'un bruit blanc avec une fonction noyau. Plus précisément on peut montrer la proposition suivante (dont une preuve se trouve par exemple dans [6]).

**Proposition 3.1** *Tout champ aléatoire  $U$  gaussien périodique stationnaire centré s'écrit comme*

$$U = W * g,$$

où  $*$  est l'opérateur de convolution périodique,  $W$  est un bruit blanc (les  $W(\mathbf{x})$  sont i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ ) et  $g$  est une "racine" de la covariance  $\Gamma$  de  $U$ , au sens où  $\Gamma = g * g^-$ , avec  $g^-(\mathbf{x}) := g(-\mathbf{x})$ . C'est à dire aussi en utilisant la transformée de Fourier discrète (TFD) :  $\widehat{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) = |\widehat{g}(\boldsymbol{\xi})|^2$ .

Comme dans le cas des textures granulaires, on a ici aussi "stabilité" des textures gaussiennes par coupe et par projection. Plus précisément on peut montrer que :

**Proposition 3.2** *Soit  $U$  une texture gaussienne 3D stationnaire périodique centrée, de noyau  $g$  (et donc de covariance  $\Gamma = g * g^-$ ). Alors*

- Pour tout  $z \in \{1, \dots, N_3\}$ , la coupe  $U_z$  de  $U$  est une texture gaussienne 2D stationnaire périodique et centrée de covariance :

$$\forall x \in \Omega_{2D}, \Gamma_z(x) = g * g^-(x, 0) = \Gamma(x, 0).$$

- La projection  $U_P$  de  $U$  est une texture gaussienne 2D stationnaire périodique et centrée de covariance :

$$\forall x \in \Omega_{2D}, \Gamma_P(x) = g_P * g_P^-(x),$$

où  $g_P$  est la projection de  $g$ , donnée par

$$g_P(x) = \sum_{z=1}^{N_3} g(x, z) = \sum_{z=1}^{N_3} g_z(x).$$

Dans certains cas (en particulier dans le cas des textures en loi de puissance, dont on reparlera un peu plus loin dans les exemples), il est plus facile de caractériser la TFD (Transformée de Fourier Discrète) des covariances. La TFD de la covariance d'une texture gaussienne 3D est donnée par

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \Omega_{3D}, \widehat{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) = |\widehat{g}(\boldsymbol{\xi})|^2.$$

Le paramètre de fréquence  $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_{3D}$  est décomposé en  $\boldsymbol{\xi} = (\nu, \tau)$  où  $\nu \in \Omega_{2D}$  et  $\tau \in \{1, \dots, N_3\}$ . La TFD de la covariance d'une coupe  $U_z$  est alors :

$$\forall \nu \in \Omega_{2D}, \widehat{\Gamma}_z(\nu) = \sum_{k=1}^{N_3} |\widehat{g}_k(\nu)|^2 = \sum_{\tau=1}^{N_3} \widehat{\Gamma}(\nu, \tau).$$

Et la TFD de la covariance de la projection  $U_P$  est :

$$\forall \nu \in \Omega_{2D}, \widehat{\Gamma}_P(\nu) = |\widehat{g}(\nu, 0)|^2 = \widehat{\Gamma}(\nu, 0).$$

Les résultats ci-dessus sont à mettre en parallèle avec le théorème de coupe-projection en Fourier qui dit que "la TF de la projection est la coupe centrale de la TF". Ici le cadre des textures est différent car on travaille "au second ordre" (avec des covariances et des auto-convolutions).

**Exemple 3** : Lorsque la texture 3D est une texture en loi de puissance, c'est à dire que la TFD de sa covariance est de la forme

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \Omega_{3D}, \widehat{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|^\beta},$$

alors on a immédiatement que la TDF de la covariance de sa projection est

$$\forall \nu \in \Omega_{2D}, \widehat{\Gamma}_P(\nu) = \frac{1}{|(\nu, 0)|^\beta} = \frac{1}{|\nu|^\beta},$$

ce qui montre que la projection est aussi une texture en loi de puissance, avec le même exposant  $\beta$ . Par contre, pour une coupe, on a

$$\forall \nu \in \Omega_{2D}, \widehat{\Gamma}_z(\nu) = \sum_{\tau=1}^{N_3} \frac{1}{|(\nu, \tau)|^\beta} = \sum_{\tau=1}^{N_3} \frac{1}{(|\nu|^2 + \tau^2)^{\beta/2}}.$$

Ce qui montre qu'une coupe n'est pas une texture en loi de puissance. Toutefois, en approchant la somme à l'aide d'une intégrale, et en regardant un équivalent lorsque  $|\nu|$  est petit (devant  $N_3$ ), on a que

$$\text{pour } \nu \text{ petit, } \widehat{\Gamma}_z(\nu) \simeq \frac{K}{|\nu|^{\beta-1}}.$$

Ce qui signifie que, dans les basses fréquences, la texture est presque une texture en loi de puissance avec un exposant  $\beta - 1$ . Ceci rejoint les résultats développés dans [4]. Cet exemple est illustré par la figure 3 avec  $\beta = 3$ .

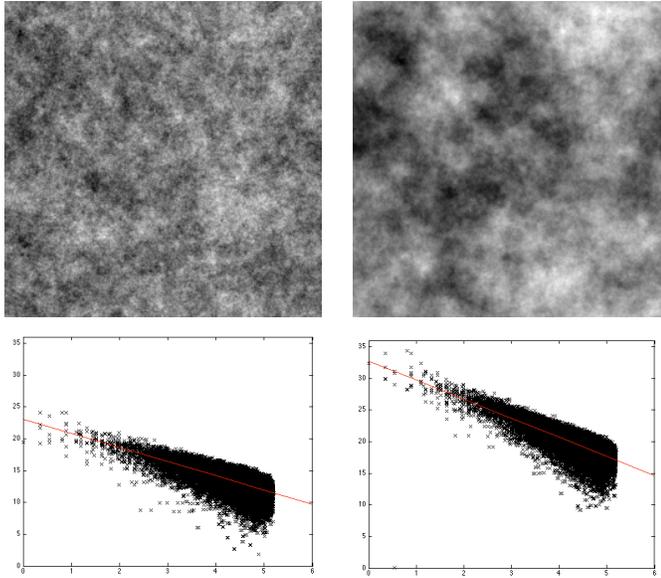


FIGURE 3 – Ligne du haut : coupe (à gauche) et projection (à droite) de la texture gaussienne de l'exemple 3 avec ici  $\beta = 3$ . Ligne du bas : points  $(\log(|\nu|), \log(|\widehat{U}|^2))$  pour  $U$  étant respectivement la coupe et la projection, et droites de régression linéaire (de pentes respectives  $-2.2$  et  $-3.0$ ) en rouge.

**Exemple 4** : On peut obtenir des textures gaussiennes anisotropes, par exemple en considérant la convolution d'un bruit blanc avec une fonction indicatrice d'un parallélépipède :

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{2|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| + 4|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2| + |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3| < 40},$$

où ici l'image est définie sur  $\{-128, \dots, 128\}^3$ . Une coupe et une projection d'une telle texture sont montrées sur la figure 4. A l'aide de la Proposition 3.2, on peut caractériser ces images 2D.

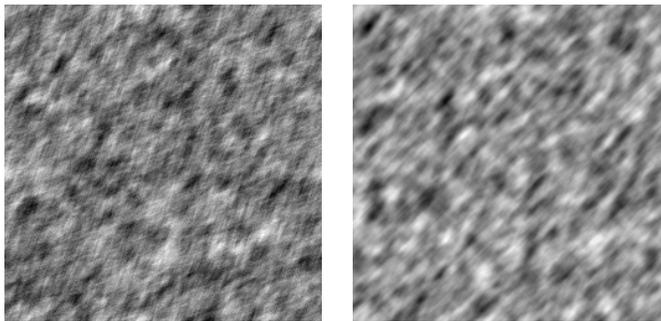


FIGURE 4 – Coupe (à gauche) et projection (à droite) de la texture gaussienne de l'exemple 4.

De façon générale, on remarque que dans tous les exemples, les images de projection sont plus lisses que les coupes. Ceci s'explique par le fait que la projection est la somme de toutes les coupes horizontales, et donc on a un effet de moyenne qui les rend plus lisses.

## 4 Conclusions et perspectives

Dans cet article, nous avons étudié deux modèles mathématiques de textures : les textures granulaires et les textures gaussiennes. Nous avons montré comment ces modèles se comportent quand on passe des images volumiques 3D à des images 2D obtenues soit par coupe soit par projection. Dans la suite, nous nous intéresserons aux projections non parallèles, ainsi qu'aux coupes obliques. Il faudra d'une part caractériser chacune de ces images mais aussi étudier les corrélations entre elles. Par ailleurs, notre étude soulève aussi des questions de problème inverse. Par exemple : étant donné un modèle de texture d'une projection, quels sont les modèles 3D ayant pu créer cette texture 2D ? L'étude des algorithmes de reconstruction d'images 3D (tel que le *filtered back-projection*) est aussi une perspective.

**Remerciement.** Cette étude a été partiellement financée par l'ANRT au travers de la convention CIFRE 2013/1052.

## Références

- [1] A.E. Burgess, On the detection of lesions in mammographic structure, in *Proceedings SPIE*, vol. 3663, pp. 419-437, 1999.
- [2] C. Castella, K. Kinkel, F. Descombes, M. Eckstein, P. Sottas, F. Verdun, and F. Bochud, Mammographic texture synthesis : second-generation clustered lumpy backgrounds using a genetic algorithm, *Optics Express*, 16 (11), pp. 7595-7607, 2008.
- [3] B. Galerne, Y. Gousseau and J.-M. Morel, Random phase textures : Theory and synthesis, *IEEE Transactions on Image Processing*, 20 (1), pp. 257-267, 2011.
- [4] G. J. Gang, D. J. Tward, J. Lee, J. H. Siewerdsen, Anatomical background and generalized detectability in tomography and cone-beam CT, *Medical Physics*, 37 (5), pp. 1948-1965, 2010.
- [5] B. Grosjean, L. Moisan, A-contrario Detectability of Spots in Textured Backgrounds, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 33(3), pp. 313-337, 2009.
- [6] D. Mumford and A. Desolneux, *Pattern Theory : The stochastic analysis of real-world signals*, AK Peters, CRC Press, 2010.
- [7] A. Papoulis, High Density Shot Noise and Gaussianity, *Journal of Applied Probability*, Vol. 8, No. 1, pp. 118-127, 1971.
- [8] R. L. Van Metter, J. Beutel, H. L. Kundel, *Handbook of Medical Imaging*, Volume 1. (Parts 1 and 2) Physics and Psychophysics, SPIE Publications, 2009.
- [9] J.J. van Wijk, Spot noise texture synthesis for data visualization, in *Proceedings of the 18th Conf. Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '91)*, pp. 309-318, 1991.